Troisième concours CAPLP

Sujet de Mathématiques

DURÉE : 4 heures

Ce sujet comprend trois exercices et un problème.

Le premier exercice porte sur diverses notions d'analyse.
Le deuxième exercice est un QCM.
Le troisième exercice traite des intégrales de Wallis.
Le problème a pour but l'étude d'une configuration par les nombres complexes.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction, interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

Exercice 1

1. Pour chacune des trois implications suivantes :
   Préciser d'abord si elle est vraie ou fausse, et ensuite :
   - si elle est vraie, la démontrer ;
   - si elle est fausse, donner un contre exemple.

   a) Soient x et y des nombres réels donnés :
   - $(xy > 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

   b) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de l'ensemble des nombres réels :
   - si f est continue sur I , alors f est dérivable sur I.

   c) Soit f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels :
   - si la fonction f est paire alors la fonction dérivée f' est impaire.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   si n^2 est un nombre pair, alors n est pair.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
   $1+3+5+....+(2n-1)=n^2$.

Exercice 2 :

Les questions suivantes offrent quatre réponses possibles repérées par les lettres a, b, c et d.
Une réponse et une seule est correcte. Préciser laquelle sans justifier votre réponse.

1. Soit la suite (u_n)définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout entier $n \geq 0$,
   avec $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ pour tout nombre réel x non nul.

   a) La suite (u_n) converge vers 4.
   b) la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   c) La suite (u_n) est croissante.
   d) La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal.
   Soit $a \in [0, \pi]$. On désigne par (E) l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que :
   $a \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq \sin x$.
   L'aire de (E) est égale à $\frac{1}{2}$ pour :

   a) $a = \frac{2\pi}{3}$
   b) *impossible*
   c) $a = \frac{5\pi}{6}$
   d) $a = \frac{\pi}{2}$.

3. Deux joueurs A et B lancent l'un après l'autre et une seule fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6, non pipé. Le joueur A gagne si l'écart entre les deux résultats est 0, 1 ou 2. Sinon c'est le joueur B qui gagne.
   La probabilité que le joueur A gagne est égale à :
   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{3}{4}$ d) *autre valeur* .

4. Soient *A*, *B* et *C* trois points distincts du plan affine euclidien. On appelle I le milieu du segment $[AB]$. Soit (E) l'ensemble des points *M* du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

   a) (E) est réduit au point *C*.
   b) (E) est l'ensemble vide.
   c) (E) est une droite passant par le point *I* et orthogonale à la droite (*AB*).
   d) (E) est un cercle de centre *J* milieu du segment $[IC]$.

<u>Exercice 3</u> : Le but de cet exercice est de démontrer quelques propriétés des intégrales de Wallis.

Pour tout entier naturel n, on note I_n l'intégrale suivante, dite intégrale de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \cdot$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir, pour tout entier naturel n, la relation :
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \cdot$$
3. Montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ est constante.
4. En déduire, pour tout entier naturel n, la relation $(n+1)I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot$
5. Montrer que la suite de terme général I_n est strictement positive et décroissante.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\frac{n+1}{n+2} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$, puis calculer la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.
7. Démontrer que la suite $\left(\sqrt{n} \times I_n\right)_{n\in N}$ est convergente et calculer sa limite.

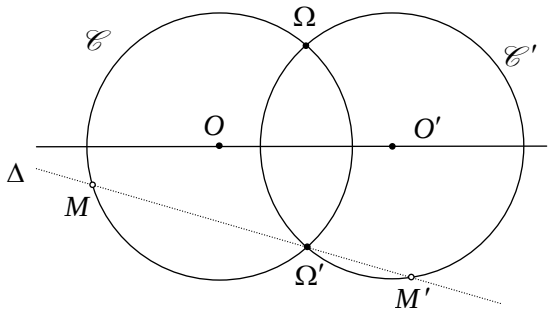
Problème

Le but de ce problème est l'étude d'une configuration.

On considère:

- deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de même rayon *R*, de centres distincts *O* et *O'*, sécants en Ω et Ω'.
- la rotation *r* de centre Ω qui envoie *O* sur *O'*.

Pour tout point *M* du cercle $\mathscr{C}$, on note *M'* son image par la rotation *r*.



On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que les points *M*, *M'* et Ω' sont alignés.

Notations

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Étant donné une application *f* de P dans P qui au point *M* d'affixe *z* fait correspondre le point *M'* d'affixe *z'* ($M' = f(M)$), on note $z' = \tilde{f}(z)$.

Étant donné un vecteur $\vec{w}$ du plan P on note $Z_{\vec{w}}$ son affixe.

Lorsque l'application *f* est une bijection on note f^{-1} la bijection réciproque.

On note *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A : Étude d'un cas particulier

Dans le plan complexe P on se donne :

- le point *O'* de l'axe réel d'affixe 2 ;
- le point Ω de P d'affixe $1+i$.

1. Démontrer que $\Omega O' = \Omega O$.
2. On considère la rotation *r* de centre Ω qui envoie *O* sur *O'*. Quel est l'angle de cette rotation *r* ?
3. Les cercles $\mathscr{C}$ de centre *O* passant par Ω et $\mathscr{C}'$ de centre *O'* passant par Ω se recoupent en un point Ω'. Quelle est l'affixe ω' de Ω' ?
4. Démontrer que pour tout nombre complexe *z* : $\tilde{r}(z) = iz + 2$.
5. On considère un point *M* situé sur le cercle $\mathscr{C}$ et on appelle *z* son affixe.
   a) Démontrer que le point *M'* est sur le cercle $\mathscr{C}'$.
   b) Démontrer que les points *M*, *M'* et Ω' sont alignés.

Partie B : Étude du cas général

Dans le plan complexe P on se donne :

- un point O' de l'axe réel d'affixe a' non nulle ;
- un point Ω de P, différent du point O, d'affixe ω et tel que : $\Omega O = \Omega O'$.
- la rotation r de centre Ω qui envoie O sur O'.

1. Montrer que $\tilde{r}(z) = \left(1 - \frac{a'}{\omega}\right) z + a'$.
2. Caractériser la rotation r dans le cas où le point Ω est situé sur l'axe des réels.
3. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par Ω et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' passant par Ω.
   a) Dans quel cas ces deux cercles sont-ils tangents ?
   b) Dans quel cas ces deux cercles sont-ils sécants ?

4. Lorsque les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants on appelle Ω' le second point d'intersection de ces deux cercles ; dans le cas où ils sont tangents on pose : $\Omega' = \Omega$.
   On considère un point M d'affixe z situé sur le cercle $\mathscr{C}$, et on note : $M' = r(M)$.
   a) Calculer l'affixe $Z_{\overrightarrow{\Omega' M}}$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega' M}$.
   b) Calculer l'affixe $Z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega' M'}$.
   c) 1er cas : $M \neq \Omega'$
      (c1) Justifier le fait que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$.
      (c2) Démontrer que $z\overline{z} = \omega\overline{\omega}$ et que $(z' - a')(\overline{z'} - \overline{a'}) = \omega\overline{\omega}$.
      (c3) Démontrer que $\frac{Z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}}{Z_{\overrightarrow{\Omega' M}}}$ est un nombre réel.
      (c4) Déduire des résultats précédents que les points M, M' et Ω' sont alignés.
   d) 2e cas : $M = \Omega'$
      Montrer que la droite (MM') est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point Ω'.

Corrigé de l'épreuve 2005 du CAPLP externe

Exercice 1

1.a) **1re méthode :** Soient x et y deux réels vérifiant $(xy > 0$ et $x < y)$; en divisant la deuxième inégalité par *xy* on obtient immédiatement : $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

2e méthode : remarquons que x et y sont non nuls et de même signe. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, on a sur chacun de ces deux intervalles l'inégalité souhaitée.
Conclusion l'implication proposée est vraie.

1.b) Montrons que cette affirmation est fausse en donnant un contre-exemple. La fonction valeur absolue est continue sur $[-1;1]$ et pourtant elle n'est pas dérivable en 0. Pour s'en persuader il suffit de constater que sa représentation graphique dans un repère orthonormé possède deux demies tangentes à l'origine qui ne coïncident pas (l'une s'appuie sur la seconde bissectrice alors que l'autre s'appuie sur la première bissectrice).
1.c) Montrons que cette affirmation est vraie. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et impaire. Etudions la dérivée en un point *a* en utilisant le taux d'accroissement $\Delta = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Puisque f est impair $\Delta = \frac{-f(-a-h)+f(-a)}{h} = \frac{f(-a-h)-f(-a)}{-h}$. Remarquons que ce quotient représente aussi un taux d'accroissement au voisinage de $(-a)$, et que sa limite lorsque *h* tend vers 0 est égale à $f'(-a)$ puisque $(-h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Or $\Delta \xrightarrow[h\to]{} f'(a)$. D'après l'unicité de la limite : $f'(a) = f'(-a)$; ceci étant vrai pour tout réel *a* de $\mathbb{R}$, *f* ' est bien une fonction paire.

2. Démontrons la propriété contraposée : supposons *n* impair ; il peut s'écrire sous la forme $2k+1$ avec *k* entier. Et $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui est bien un nombre impair. Nous avons montré que si *n* est impair alors n^2 est impair . Finalement si n^2 est pair alors *n* est pair.
Nous aurions pu aussi utiliser un théorème d'arithmétique : 2 étant premier s'il divise $n \times n$ il divise l'un des facteurs ; donc il divise n.

3. Cette propriété est vraie pour $n = 1$; supposons qu'elle est vraie pour un entier *n* supérieur ou égal à 1 : on a alors $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$; soit $1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2n+1) = (n+1)^2$ qui est bien le résultat attendu.
La propriété est vraie pour 1 et vraie pour n+1 si elle est vraie pour un n entier quelconque supérieur ou égal à 1, donc la propriété est bien vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

Exercice 2

1. Remarquons que f étant continue sur $\mathbb{R}^*$, si (u_n) converge vers 4 alors $f(u_n)$ converge vers $f(4)$ qui est égal à $\frac{11}{4}$. Or les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont même limite. Cette contradiction exclut que (u_n) converge vers 4. Les mêmes arguments excluent la réponse d). Puisque la limite de *f* en $+\infty$ est 4, si (u_n) tendait vers $+\infty$ alors $(f(u_n))$ tendrait vers 4. Là encore nous arrivons à exclure la réponse b).
Reste la réponse c). Justifions là :

$u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{11}{3}$ donc $0 < u_0 < u_1$; f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc si $0 < u_n < u_{n+1}$ alors $0 < u_{+1} < u_{n+2}$. Par récurrence nous venons de montrer que pour tout entier naturel n que $0 < u_n < u_{n+1}$ et il en résulte que **la suite (u_n) est croissante**.

2. a appartenant à $[0\ ,\ \pi]$, pour tout x de $[a\ ,\ \pi]$ $\sin x$ est positif. Donc l'aire du domaine (E) est égale à : $\int_a^{\pi} \sin x dx$; le calcul de cette intégrale donne $1 + \cos a$. Donc pour que l'aire de (E) soit égale à $\dfrac{1}{2}$ il faut et il suffit que $\cos a = -\dfrac{1}{2}$; c'est à dire que $a = \dfrac{2\pi}{3}$ (là encore nous nous servons de $a \in [0\ ,\ \pi]$) La seule réponse exacte est donc la réponse a).

3. Utilisons un tableau pour représenter les cas possibles en ce qui concerne l'écart entre les deux score:

Score de B Score de A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

D'après l'énoncé les 36 cases sont équiprobables ; or il y en a 24 qui donnent un écart égal à 0, 1ou 2. Donc **la probabilité recherchée est égale à $\dfrac{2}{3}$.**

4. La somme des coefficients dans $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \|$ est nulle donc ce nombre est indépendant du point M (cela peut se démontrer en utilisant la relation de Chasles):

On a en fait : $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{CI} \|$;

et $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} \| = 2 \| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} \| = 4 \| \overrightarrow{MJ} \|$, où J est le milieux de [*IC*].

Donc la condition caractérisant les points de (E) revient à : $MJ = \dfrac{1}{2}\left\| \overrightarrow{IC} \right\|$.

L'ensemble (E) cherché est donc un cercle de centre *J*. C'est la réponse d) qui est exacte.

Exercice 3

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \dfrac{\pi}{2}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$. Donc $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
2. Pour transformer I_{n+2} utilisons une l'intégration par partie définie par : $U = \cos^{n+1} t$ et V'=cost . Il vient : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \times \cos t dt = \left[\cos^{n+1} t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos^n t \sin t \times \sin t dt$

   $= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t (1 - \cos^2 t) dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Ce qui donne bien : $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.
3. Utilisons la relation trouvée au 2. pour montrer que $u_n = u_{n+1}$:

$u_n = (n+1)I_{n+1}I_n = (n+1)I_nI_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = u_{n+1}$. Donc la suite (u_n) est bien constante.

4. D'après ce qui précède $u_n = u_0 = 1 \times I_1 \times I_0 = \frac{\pi}{2}$. C'est bien la valeur attendue.

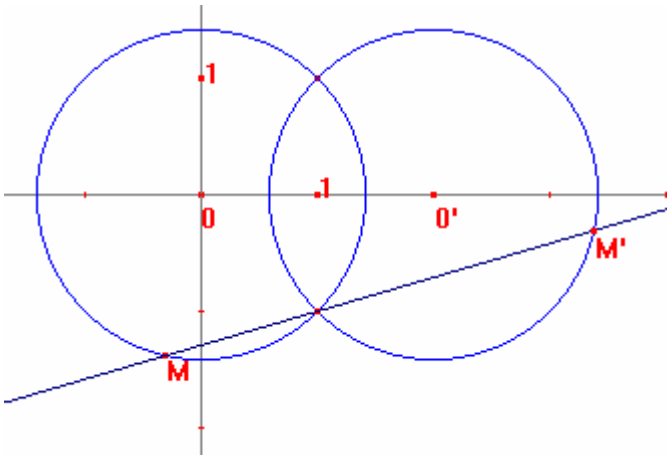
5. Remarquons que pour *t* compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, d'une part $\cos^n t$ reste strictement positif sauf pour $t = \frac{\pi}{2}$, et d'autre part $\cos^n t \geq \cos^{n+1} t$; d'où : $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ (on utilise aussi que $0 < \frac{\pi}{2}$). Donc **la suite de terme général I_n est strictement positive et décroissante.**

6. D'après le 2.: $\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n}$; et d'après le 5, : $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. C'est bien la double inégalité attendue. Nous pouvons appliquer le théorème « des gendarmes », pour conclure que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

7. $nI_n{}^2 = n(I_n \times I_n) = (n+1)(I_nI_{n+1}) \times \frac{n}{n+1} \times \frac{I_n}{I_{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$. I_n restant positif : $\sqrt{n}I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Problème

Partie A



Nous noterons ω l'affixe de Ω. Ici $\omega = 1 + i$.

1. Notons que l'abscisse de Ω est 1 ; donc il est sur la médiatrice de [*OO'*] et il est équidistant de *O* et *O'*. Nous aurions pu aussi montrer par le calcul dans $\mathbb{C}$ que : $|1+i| = |2-(1+i)|$.

2. Soit θ l'angle de cette rotation, et ; $\theta = (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}) = \arg\left(\frac{0-(1+i)}{2-(1+i)}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc **l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.**

3. La figure étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses, $\omega' = \overline{\omega} = 1 - i$.

4. $z'-(1+i)=e^{i\frac{\pi}{2}}([z-(1+i)]$ est la traduction dans $\mathbb{C}$ de : *M'* est l'image de *M* dans la rotation dont le centre est d'affixe $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ **.** La résolution de cette équation nous donne : $z'=iz+2$.

5. a) $|z'-2|=|iz+2-2|=|iz|=|z|=\sqrt{2}$ car *M* est sur $\mathscr{C}$, cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. Donc ***M' est bien sur le cercle*** $\mathscr{C}'$ **.**

b) Pour montrer que $M\ M'\ et\ \Omega'$ sont alignés calculons $\Delta=\arg(\frac{z'-\omega'}{z-\omega'})$;

$$\Delta=\frac{(iz+2)-(1-i)}{z-(1-i)}=\frac{(iz+1+i)(\overline{z-1+i})}{|z-1+i|^2}=\frac{(iz+1+i)(\bar{z}-1-i)}{|z-1+i|^2}=\frac{iz\bar{z}+i(\bar{z}-z)+z+\bar{z}-2i}{|z-1+i|^2}.$$

Mais $z\bar{z}=2$, $\bar{z}-z$ est imaginaire pur, et $\bar{z}+z$ est réel ; donc Δ est réel.
Ce qui prouve que $M\ M'\ et\ \Omega$ **sont alignés**.

Partie B

1. Utilisons la même relation qu'au A 4. : $\tilde{r}(z)-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ Mais nous savons que $r(O)=O'$;
d'où : $a'-\omega=e^{i\theta}(0-\omega)$; d'où : $e^{i\theta}=1-\frac{a'}{\omega}$, et : $\tilde{r}(z)=z'=(1-\frac{a'}{\omega})z+a'$.
2. Si Ω est situé sur l'axe des réels, étant équidistant de O et O' qui sont situés aussi sur cet axe, Ω est milieu de [OO']. Et la rotation est alors une symétrie centrale de centre Ω.
3. a) Ces deux cercles étant de même rayon mais pas de même centre, s'il sont tangents c'est au milieu de [OO']. Et nous nous retrouvons dans le cas de la question précédente.
b) Si ces deux cercles sont sécants c'est en deux points non situés sur l'axe des réels ; ce sera le cas si et seulement si Ω n'est pas sur cet axe.
4. a) $z_{\overrightarrow{\Omega' M}}=z-\omega'=z-\bar{\omega}$

b) $z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}=z'-\bar{\omega}=(1-\frac{a'}{\omega})z+a'-\bar{\omega}$.

c) cas $M\neq\Omega'$:
c1) La rotation de centre Ω envoyant *O* en *O'* envoie le cercle $\mathscr{C}$ centré en *O* sur un cercle centré en *O'* et de même rayon ; c'est donc le cercle $\mathscr{C}'$. *M* étant sur $\mathscr{C}$ *M'* est sur $\mathscr{C}'$.
c2) Les points *M* et Ω sont sur un même cercle de centre *O* donc : $z\bar{z}=OM^2=O\Omega^2=\omega\bar{\omega}$.
Les points *M'* et Ω sont sur un même cercle de centre *O'*, donc :

$$(z'-a')(\overline{z'-a'})=O'M'^2=O'\Omega^2=O\Omega^2=\omega\bar{\omega}.$$

c3) $\frac{z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}=\frac{(1-\frac{a'}{\omega})z+a'-\bar{\omega}}{z-\bar{\omega}}=\frac{z-\bar{\omega}+a'(1-\frac{z}{\omega})}{z-\bar{\omega}}=1+\frac{a'(\omega-z)}{\omega(z-\bar{\omega})}=1+\frac{a'(\omega-z)\bar{\omega}(\bar{z}-\omega)}{|...|^2}$.

Pour prouver que ce nombre est réel nous allons étudier $(\omega-z)\bar{\omega}(\bar{z}-\omega)$ (on utilise ici que *a'* est réel).
En développant il vient : $(\omega-z)\bar{\omega}(\bar{z}-\omega)=\omega\bar{\omega}(z+\bar{z})-z\bar{z}\bar{\omega}-\omega^2\bar{\omega}$. Or $\omega\bar{\omega}(z+\bar{z})$ est réel ; et $z\bar{z}=\omega\bar{\omega}$. Il nous reste donc à prouver que : $-\omega\bar{\omega}^2-\omega^2\bar{\omega}$ est réel ; ce qui est clair puisqu'il s'agit de la somme de deux nombres conjugués. **Donc** $\frac{z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}$ **est bien réel**.

c4) La conclusion précédente nous assure que $M\ M'\ et\ \Omega'$ **sont bien alignés**.

d) cas $M=\Omega'$:
Etudions l'angle entre les droites (*MM'*) et (*OΩ'*):

$z'-z=(1-\frac{a'}{\omega})\overline{\omega}+a'-\overline{\omega}=a'(-\frac{\overline{\omega}}{\omega}+1)=\frac{\overline{\omega}a'(\omega-\overline{\omega})}{|\omega|^2}$. Remarquons que $\frac{a'(\omega-\overline{\omega})}{|\omega|^2}$ est un imaginaire pur ; par suite $\frac{z'-z}{\omega-0}$ est imaginaire pur, et l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ est droit. Ce qui nous assure que **la droite (MM') est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en Ω'.**

Remarque : dans cette question, il aurait convenu d'exclure le cas où les cercles sont tangents car alors la droite (MM') n'est pas définie (et le complexe considéré ci-dessus est nul et n'a pas d'argument)